

114 學年度學科能力測驗數學 A 考科 非選擇題滿分參考答案與評分原則

數學 A 考科的非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應清楚表達如何依據題設進行推論，並詳細說明解題過程，且得到正確答案，方可得到滿分。若能清楚表達如何依據正確題設進行推論，並詳細說明解題過程，但最後未求出正確答案，會依據解題概念的完整性，酌給部分分數。若未能依據正確題設進行推論，或未能詳細說明解題過程，則不予給分。例如沒有解題過程；或利用錯誤推論；或使用不符合題設的數據作答，均不給分。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考，詳細評分原則說明與常見錯誤概念，請參閱本中心將於 4 月 15 日出刊的第 347 期《選才電子報》。114 學年度學科能力測驗數學 A 考科非選擇題各題的參考答案說明如下：

第 19 題

一、滿分參考答案：

依題意 $A^2 = B^3 = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix}$ ，所以依據題意 A 為旋轉 45° 的旋轉矩陣，

$$\text{即 } A = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix};$$

而 B 為旋轉 30° 的旋轉矩陣，即 $B = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ 。

$$\text{故 } P \text{ 經 } A^3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \text{ 變換，可利用矩陣乘法 } \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 得 } Q \text{ 點坐}$$

標為 $(-\sqrt{2}, 0)$ 。

或依題意 A^3 為旋轉 135° 矩陣，而 $\overrightarrow{OP}$ 長度為 $\sqrt{2}$ 且與 $(1, 0)$ 夾角為 45° ，故 $\overrightarrow{OQ}$ 長度為 $\sqrt{2}$ 且與 $(1, 0)$ 夾角為 $45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$ ，因此得 Q 點坐標為 $(-\sqrt{2}, 0)$ 。

故 Q 經 $B^4 = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 2 \\ \sqrt{3} & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 變換，可利用矩陣乘法 $\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 2 \\ \sqrt{3} & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$ ，得 R 點坐標為 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$ 。

設 $\overrightarrow{OR}$ 與 $(1,0)$ 的夾角為 θ ，利用內積 $\overrightarrow{OR} \cdot (1,0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}) \cdot (1,0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 以及 $\overrightarrow{OR}$ 的長度為 $\sqrt{2}$ ，推得 θ 為 60° 。也可由 B^4 為旋轉 120° 矩陣，故 $\overrightarrow{OR}$ 的方向角為 $45^\circ + 135^\circ + 120^\circ = 300^\circ$ ，因此 $\overrightarrow{OR}$ 與 $(1,0)$ 的夾角為 60° 。

二、評分原則：

滿分：以下兩項均須正確

1. 根據題意所給條件，得出 Q 點坐標為 $(-\sqrt{2}, 0)$ ，且過程正確。
2. 根據題意所給條件，得出 $\overrightarrow{OR}$ 與 $(1,0)$ 的夾角為 60° 。且過程正確。

部分給分

以上兩個的解題過程部分正確。

零分

未作答或未符合部份給分原則。

第 20 題

一、滿分參考答案：

因 R 點坐標為 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$ ，推得直線 OR 方程式為 $y = -\sqrt{3}x$ 。又 L 為過 $(1,1)$ 的水平線，故 L 方程式為 $y=1$ ，可得 S 點坐標為 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ ，再由內積 $\overrightarrow{SO} \cdot (1,0) = (\frac{\sqrt{3}}{3}, -1) \cdot (1,0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 以及 $\overrightarrow{SO}$ 的長度為 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，推得 $\angle OSP = 60^\circ$ 。

也可設點 $D(1,0)$ ，由第 19 題知 $\angle ROD = 60^\circ$ 。因直線 L 與直線 OQ (即直線 OD) 平行，可由同位角得出 $\angle OSP = 60^\circ$ 。

二、評分原則：

滿分：以下兩項均須正確

1.根據題意所給條件，得出 $\angle OSP = 60^\circ$ ，且過程正確。

2.根據題意所給條件，得出 S 點坐標為 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ ，且過程正確。

部分給分

以上兩個的解題過程部分正確。

零分

未作答或未符合部份給分原則。