

等 別：三等考試

類 科：天文

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

下列各個題目必須詳列解題的過程。

一、已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，求矩陣 A 的對角化後的矩陣。（15分）

二、令 $\eta = z^2 dx dy$ 在 R^3 空間，並令 S 是在 R^3 空間單位球的上半球體。計算 $\iint_S \eta = ?$ （15分）

三、已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 。

(每小題5分，共10分)

(一)求矩陣 A 的列空間的基底。(二)求矩陣 A 的行空間的基底。

四、有一熱方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ，其中 $t > 0$ 且 $-\infty < x < \infty$ 。已知一開始時溫度的分布是 $u(x, 0) = 1 + \cos 2x, -\infty < x < \infty$ 。求這個問題的解。（20分）

五、已知有一個系統 $\begin{cases} 2x'' = -6x + 2y \\ y'' = 2x - 2y + 40 \sin 3t \end{cases}$ ，它一開始時的條件是 $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$ 。求這個問題的解。（20分）

六、已知問題 $y'' + y = \tan x$ 和 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 。求這個問題的解。（20分）