

大學入學考試中心

102 學年度學科能力測驗試題

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{3}{8}$ 與第 19 列的 $\frac{8}{8}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
18	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
19	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\frac{-}{50}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{50}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
20	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐
21	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。

一、國文成績或英文成績 70 分(含)以上；

二、數學成績及格。

已知小文上學期國文 65 分而且他不符合參選模範生資格。請問下列哪一個選項的推論是正確的？

- (1) 小文的英文成績未達 70 分
- (2) 小文的數學成績不及格
- (3) 小文的英文成績 70 分以上但數學成績不及格
- (4) 小文的英文成績未達 70 分且數學成績不及格
- (5) 小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格

2. 令 $a = 2.6^{10} - 2.6^9$ ， $b = 2.6^{11} - 2.6^{10}$ ， $c = \frac{2.6^{11} - 2.6^9}{2}$ 。請選出正確的大小關係。

- (1) $a > b > c$
- (2) $a > c > b$
- (3) $b > a > c$
- (4) $b > c > a$
- (5) $c > b > a$

3. 袋子裡有 3 顆白球，2 顆黑球。由甲、乙、丙三人依序各抽取 1 顆球，抽取後不放回。若每顆球被取出的機會相等，請問在甲和乙抽到相同顏色球的條件下，丙抽到白球之條件機率為何？

- | | | |
|-------------------|--------------------|-------------------|
| (1) $\frac{1}{3}$ | (2) $\frac{5}{12}$ | (3) $\frac{1}{2}$ |
| (4) $\frac{3}{5}$ | (5) $\frac{2}{3}$ | |

4. 已知以下各選項資料的迴歸直線(最適合直線)皆相同且皆為負相關，請選出相關係數最小的選項。

$$(1) \begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 1 & 13 & 1 \end{array}$$

$$(2) \begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 3 & 10 & 2 \end{array}$$

$$(3) \begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 5 & 7 & 3 \end{array}$$

$$(4) \begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 9 & 1 & 5 \end{array}$$

$$(5) \begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 7 & 4 & 4 \end{array}$$

5. 將 24 顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆。請選出分裝的方法數。

- (1) 55
(2) 66
(3) 132
(4) 198
(5) 253

6. 莎韻觀測遠方等速率垂直上升的熱氣球。在上午 10:00 熱氣球的仰角為 30° ，到上午 10:10 仰角變成 34° 。請利用下表判斷到上午 10:30 時，熱氣球的仰角最接近下列哪一個度數？

θ	30°	34°	39°	40°	41°	42°	43°
$\sin \theta$	0.500	0.559	0.629	0.643	0.656	0.669	0.682
$\cos \theta$	0.866	0.829	0.777	0.766	0.755	0.743	0.731
$\tan \theta$	0.577	0.675	0.810	0.839	0.869	0.900	0.933

- (1) 39°
(2) 40°
(3) 41°
(4) 42°
(5) 43°

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 設 n 為正整數，符號 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n$ 代表矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 自乘 n 次。令 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ ，請選

出正確的選項。

- (1) $a_2 = 1$
- (2) a_1, a_2, a_3 為等比數列
- (3) d_1, d_2, d_3 為等比數列
- (4) b_1, b_2, b_3 為等差數列
- (5) c_1, c_2, c_3 為等差數列

8. 設 $a > 1 > b > 0$ ，關於下列不等式，請選出正確的選項。

- (1) $(-a)^7 > (-a)^9$
- (2) $b^{-9} > b^{-7}$
- (3) $\log_{10} \frac{1}{a} > \log_{10} \frac{1}{b}$
- (4) $\log_a 1 > \log_b 1$
- (5) $\log_a b \geq \log_b a$

9. 設 $a < b < c$ 。已知實係數多項式函數 $y = f(x)$ 的圖形為一開口向上的拋物線，且與 x 軸交於 $(a, 0)$ 、 $(b, 0)$ 兩點；實係數多項式函數 $y = g(x)$ 的圖形亦為一開口向上的拋物線，且跟 x 軸相交於 $(b, 0)$ 、 $(c, 0)$ 兩點。請選出 $y = f(x) + g(x)$ 的圖形可能的選項。

- (1) 水平直線
- (2) 和 x 軸僅交於一點的直線
- (3) 和 x 軸無交點的拋物線
- (4) 和 x 軸僅交於一點的拋物線
- (5) 和 x 軸交於兩點的拋物線

10. 坐標平面上考慮兩點 $Q_1(1,0), Q_2(-1,0)$ 。在下列各方程式的圖形中，請選出其上至少有一點 P 滿足內積 $\overrightarrow{PQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_2} < 0$ 的選項。

(1) $y = \frac{1}{2}$

(2) $y = x^2 + 1$

(3) $-x^2 + 2y^2 = 1$

(4) $4x^2 + y^2 = 1$

(5) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

11. 設 F_1, F_2 為橢圓 Γ 的兩個焦點。 S 為以 F_1 為中心的正方形 (S 的各邊可不與 Γ 的對稱軸平行)。試問 S 可能有幾個頂點落在 Γ 上？

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 4

(5) 0

12. 設實數組成的數列 $\langle a_n \rangle$ 是公比為 -0.8 的等比數列，實數組成的數列 $\langle b_n \rangle$ 是首項為 10 的等差數列。已知 $a_9 > b_9$ 且 $a_{10} > b_{10}$ 。請選出正確的選項。

(1) $a_9 \times a_{10} < 0$

(2) $b_{10} > 0$

(3) $b_9 > b_{10}$

(4) $a_9 > a_{10}$

(5) $a_8 > b_8$

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（13-35）。

2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 k 為一整數。已知 $\frac{k}{3} < \sqrt{31} < \frac{k+1}{3}$ ，則 $k =$ ⑬⑭。

B. 設 a, b 為實數且 $(a+bi)(2+6i) = -80$ ，其中 $i^2 = -1$ 。則 $(a, b) =$ (⑮⑯), (⑰⑱)。

C. 坐標平面中 $A(a, 3)$, $B(16, b)$, $C(19, 12)$ 三點共線。已知 C 不在 A, B 之間，且 $\overline{AC} : \overline{BC} = 3:1$ ，則 $a+b =$ ⑲⑳。

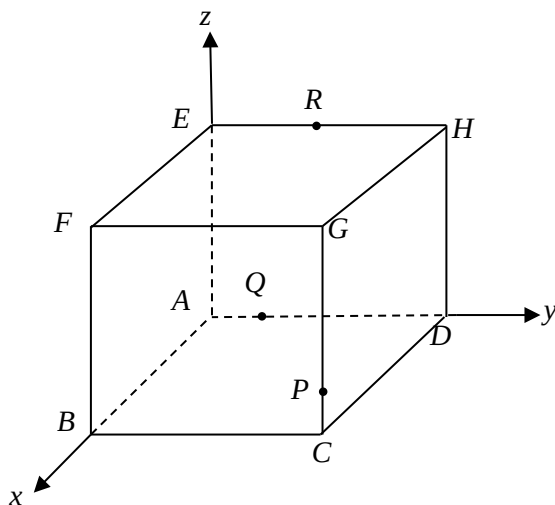
D. 阿德賣 100 公斤的香蕉，第一天每公斤賣 40 元；沒賣完的部份，第二天降價為每公斤 36 元；第三天再降為每公斤 32 元，到第三天全部賣完，三天所得共為 3720 元。假設阿德在第三天所賣香蕉的公斤數為 t ，可算得第二天賣出香蕉的公斤數為 $at+b$ ，其中 $a =$ ㉑㉒， $b =$ ㉓㉔。

E. 坐標平面上，一圓與直線 $x-y=1$ 以及直線 $x-y=5$ 所截的弦長皆為 14。則此圓的面積為 ㉕㉖ π 。

- F. 令 $\vec{A}, \vec{B}$ 為坐標平面上兩向量。已知 $\vec{A}$ 的長度為 1, $\vec{B}$ 的長度為 2 且 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 之間的夾角為 60° 。令 $\vec{u} = \vec{A} + \vec{B}$, $\vec{v} = x\vec{A} + y\vec{B}$, 其中 x, y 為實數且符合 $6 \leq x+y \leq 8$ 以及 $-2 \leq x-y \leq 0$, 則內積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 的最大值為 27 28。

- G. 設銳角三角形 ABC 的外接圓半徑為 8。已知外接圓圓心到 $\overline{AB}$ 的距離為 2, 而到 $\overline{BC}$ 的距離為 7, 則 $\overline{AC} = \underline{29\sqrt{30} \ 31}$ 。(化成最簡根式)

- H. 如下圖, 在坐標空間中, A, B, C, D, E, F, G, H 為正立方體的八個頂點, 已知其中四個點的坐標 $A(0,0,0)$ 、 $B(6,0,0)$ 、 $D(0,6,0)$ 及 $E(0,0,6)$, P 在線段 $\overline{CG}$ 上且 $\overline{CP}:\overline{PG}=1:5$, R 在線段 $\overline{EH}$ 上且 $\overline{ER}:\overline{RH}=1:1$, Q 在線段 $\overline{AD}$ 上。若空間中通過 P, Q, R 這三點的平面, 與直線 AG 不相交, 則 Q 點的 y 坐標為 $\frac{32}{34} \frac{33}{35}$ 。(化成最簡分數)



參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2 \right)}$$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X \sigma_Y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010, \log_{10} 3 \approx 0.4771, \log_{10} 5 \approx 0.6990, \log_{10} 7 \approx 0.8451$