

等 級：薦任

類科(別)：天文

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程、向量分析）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、每個分量都是 1 的 $n \times n$ 矩陣，試求其所有特徵值及對應的特徵向量。（20 分）

二、雙變數函數 $f(x, y) = \sqrt{4 - 2x^2 - 2y^2}$ 與向量函數 $\vec{g}(r, t, \theta) = \langle r \cos t\theta, r \sin t\theta \rangle$ ，使用微分的連鎖規則（chain rule）計算梯度 $\nabla f(\vec{g}(r, t, \theta))$ 。（20 分）

三、使用直角坐標重積分計算單位球的體積。（20 分）

四、已知初始條件 $y(0) = \pi$ 與 $y'(0) = 0$ ，求微分方程式 $y''(x) - xy(x) = 0$ 在原點的級數解。（20 分）

五、 2π 週期函數 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的函數值為 $f(x) = x$ ，求其傅立葉級數。（20 分）