

類 科：核子工程

科 目：微積分與微分方程

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、(一)求極限值： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos t^2 dt}{2x^2}$ 。(10 分)

(二)已知 $y = f(x)$ 滿足方程式 $x + 6x^3y^3 + y - 8 = 0$ 且 $f(1) = 1$ ，求圖形 $f(x)$ 在點 $(1, f(1))$ 的切線方程式。(10 分)

二、利用 Lagrange 乘數法 (The Method of Lagrange Multipliers) 求函數 $f(x, y) = 200x^{0.75}y^{0.25}$ 在 $g(x, y) = 400x + 600y - 120000 = 0$ 的條件下之最大值。(20 分)

三、令向量函數 $\vec{F}(x, y, z) = (xyz^2)\vec{i} + (3yzx^2)\vec{j} + (5xzy^2)\vec{k}$ 。(每小題 10 分，共 20 分)

(一)試求 $\vec{F}$ 的散度 (Divergence)： $\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z)$ 。

(二)試求 $\vec{F}$ 的旋度 (Curl)： $\nabla \times \vec{F}(x, y, z)$ 。

四、(一)求下列的積分值：(10 分)

$$\iint_{\Omega} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \text{ 其中 } \Omega = \{(x, y) \mid \pi \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\pi\}。$$

(二)利用格林定理 (Green Theorem) 計算下列線積分：(10 分)

$$\oint_C (2xy + e^{x^2})dx + (2x + e^{y^2})dy, \text{ 其中曲線 } C \text{ 是由拋物線 } y = x^2 \text{ 與直線 } y = x \text{ 所圍成封閉區域之邊界。}$$

五、求下列微分方程組的解：(20 分)

$$\frac{dy_1}{dt} = 2y_2(t) + 2y_3(t), \quad y_1(0) = 5,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 2y_3(t) + 2y_1(t), \quad y_2(0) = -1,$$

$$\frac{dy_3}{dt} = 2y_1(t) + 2y_2(t), \quad y_3(0) = -1。$$