

103 學年度指定科目考試數學甲非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科試題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請詳見本中心將於 8 月 15 日出刊的《選才電子報》。

103 學年度指定科目考試數學甲非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)題

$y = x - x^2$ 的圖形交直線 $y = 0$ 的 x 坐標為 $x = 0, 1$ ；故 Ω 之面積為

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

第(2)題

直線 $y = cx$ 交 $y = x - x^2$ 的圖形的 x 坐標為 $x = 0, 1 - c$

以下提供三個解法列出區域的面積

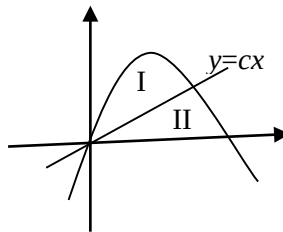
【解法一】利用區域 I 之面積

直線 $y = cx$ 與 $y = x - x^2$ 所圍面積為 $\int_0^{1-c} [(x - x^2) - cx] dx = \frac{1}{12}$

$$\Rightarrow \left[-\frac{x^3}{3} + (1-c) \frac{x^2}{2} \right]_0^{1-c} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow -\frac{(1-c)^3}{3} + \frac{(1-c)^3}{2} = \frac{1}{12}$$

$$\text{化簡得 } \frac{(1-c)^3}{6} = \frac{1}{12}, \text{ 故 } c = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$



【解法二】利用區域 II 之面積

$$\int_0^{1-c} cx dx + \int_{1-c}^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{2}c(1-c)^2 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{1-c}^1 = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}c(1-c)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(1-c)^2 + \frac{(1-c)^3}{3} = \frac{1}{12}$$

$$\text{化簡得 } \frac{(1-c)^3}{6} = \frac{1}{12}, \text{ 故 } c = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

【解法三】利用區域 I 之面積 = 區域 II 之面積

$$\int_0^{1-c} (x - x^2 - cx) dx = \frac{1}{2}c(1-c)^2 + \int_{1-c}^1 (x - x^2) dx$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{x^3}{3} + (1-c)\frac{x^2}{2} \right]_0^{1-c} = \frac{1}{2}c(1-c)^2 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{1-c}^1$$

$$\frac{1}{6}(1-c)^3 = \frac{1}{2}c(1-c)^2 + \frac{1}{6} - \frac{(1-c)^2}{2} + \frac{1}{3}(1-c)^3$$

$$\text{化簡得 } \frac{(1-c)^3}{6} = \frac{1}{12}, \text{ 故 } c = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

第二題

第(1)題

$$a_4^2 + b_4^2 = |(1+i)^4|^2 = |1+i|^8 = \sqrt{2}^8 = 16。$$

第(2)題

【解法一】

$$\text{由 } a_{n+1} + ib_{n+1} = (1+i)^{n+1} = (1+i)^n(1+i) = (a_n + ib_n)(1+i) = (a_n - b_n) + i(a_n + b_n)$$

$$\text{即 } \begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}, \text{ 推得 } T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

【解法二】

由題意可推得 $a_1 + ib_1 = 1 + i$, $a_2 + ib_2 = (1 + i)^2 = 2i$

$$\text{設 } T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ 則 } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{可列出方程組 } \begin{cases} a + b = 0 \\ c + d = 2 \\ 2b = -2 \\ 2d = 2 \end{cases}, \text{ 解得 } T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

【解法三】

根據題意可推得 $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

$$\text{推得 } T = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

第(3)題

【解法一】

設 P 、 Q 之坐標（以行向量表示）分別為 (a, b) 、 (c, d)

則 P' 、 Q' 之坐標分別為 $(a - b, a + b)$ 、 $(c - d, c + d)$

$$\text{得 } \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{\sqrt{(a-b)^2 + (a+b)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{同理 } \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}} = \frac{\sqrt{2(c^2 + d^2)}}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \sqrt{2} \quad \text{故 } \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \sqrt{2} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}$$

以下提供三個方法證明 $\angle POQ = \angle P'OQ'$

【解法 A】

$$\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OQ'} = (a - b)(c - d) + (a + b)(c + d) = 2(ac + bd) = 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$$

$$\text{故 } \frac{\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OQ'}}{|\overrightarrow{OP'}| |\overrightarrow{OQ'}|} = \frac{2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{\sqrt{2} |\overrightarrow{OP}| \sqrt{2} |\overrightarrow{OQ}|} = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|}$$

因此得證 $\cos \angle POQ = \cos \angle P'OQ'$

【解法 B】

$$\begin{aligned}\cos \angle P'OQ' &= \frac{\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OQ'}}{|\overrightarrow{OP'}| |\overrightarrow{OQ'}|} = \frac{(a-b)(c-d) + (a+b)(c+d)}{\sqrt{2a^2 + 2b^2} \sqrt{2c^2 + 2d^2}} \\ &= \frac{2(ac+bd)}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \sqrt{2}\sqrt{c^2+d^2}} \\ \cos \angle POQ &= \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|} = \frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2} \sqrt{c^2+d^2}}\end{aligned}$$

因此得證 $\cos \angle POQ = \cos \angle P'OQ'$

【解法 C】

$$[(a-b)-(c-d)]^2 + [(a+b)-(c+d)]^2 = 2[(a-c)^2 + (b-d)^2]$$

$$\text{推得 } |\overrightarrow{P'Q}|^2 = 2|\overrightarrow{PQ}|^2$$

$$\cos \angle POQ = \frac{|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 - |\overrightarrow{PQ}|^2}{2|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|}$$

$$\cos \angle P'OQ' = \frac{|\overrightarrow{OP'}|^2 + |\overrightarrow{OQ'}|^2 - |\overrightarrow{P'Q'}|^2}{2|\overrightarrow{OP'}| |\overrightarrow{OQ'}|} = \frac{2|\overrightarrow{OP}|^2 + 2|\overrightarrow{OQ}|^2 - 2|\overrightarrow{PQ}|^2}{4|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|}$$

故 $\cos \angle POQ = \cos \angle P'OQ'$ ，而餘弦函數在 0° 與 180° 之間為一對一，

所以 $\cos \angle POQ = \cos \angle P'OQ'$

【解法二】利用線性變換

$$\text{正確由 } T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 看出 } T = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}$$

所以， T 的作用是將向量旋轉 45° 並放大 $\sqrt{2}$ 倍