

103 學年度指定科目考試數學乙非選擇題參考答案

數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科試題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請詳見本中心將於8月15日出刊的《選才電子報》。

103 學年度指定科目考試數學乙非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)題

解 1：1. 因 $\overrightarrow{AB} = (12, 16) = 4(3, 4)$ ，又直線 L 通過 A 點且與線段 $\overline{AB}$ 垂直，可知直

線 L 的方向向量為 $(4, -3)$ 或 $(-4, 3)$

2. 直線 L 方向上的單位向量為 $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

3. 由 $(11, 2) + 5\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = (15, -1)$ 及 $(11, 2) + 5\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = (7, 5)$ ，

得知： C, D 兩點的坐標為 $(15, -1), (7, 5)$

解 2：1. 由直線 L 的方向向量 $(4, -3)$ ，可設直線 L 的參數式： $\begin{cases} x = 11 + 4t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$ ，

其中 t 為實數

2. 由點 C, D 與 A 點相距距離為 5，可列式： $\sqrt{(11 + 4t - 11)^2 + (2 - 3t - 2)^2} = 5$ ，

解得 $t = \pm 1$ ，可知： C, D 兩點的坐標為 $(15, -1), (7, 5)$

解 3：列出聯立方程式 $\begin{cases} (x-23)^2 + (y-18)^2 = 425 \\ (x-11)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{cases}$ ，再解出 $(x, y) = (15, -1), (7, 5)$

第(2)題

解 1：利用行列式求 $\triangle OCD$ 面積。面積 = $\left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 15 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \right| = 41$

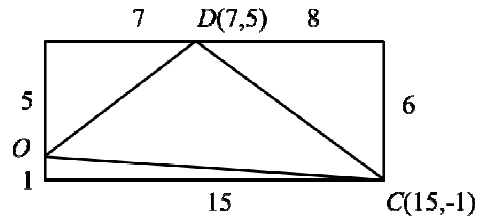
解 2：利用外積求 $\triangle OCD$ 面積。面積 = $\frac{1}{2} |(7, 5, 0) \times (15, -1, 0)| = \frac{1}{2} |(0, 0, -82)| = 41$

解 3：利用 (底 $\times$ 高) $\div 2$ 求 $\triangle OCD$ 面積。點 O 到直線 $L: 3x + 4y = 41$ 的距離為 $\frac{41}{5}$ ，

$$\text{所以，}\triangle OCD \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{41}{5} = 41$$

解 4：利用擴大矩形面積扣減 3 個小三角形面積求 $\triangle OCD$ 面積。

如圖，將 $\triangle OCD$ 擴大成一矩形，

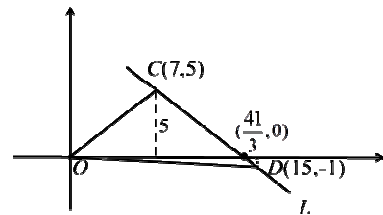


$$\text{故 } \triangle OCD \text{ 面積} = 15 \times 6 - \frac{1}{2}(15 \times 1 + 7 \times 5 + 8 \times 6) = 41$$

解 5：利用切割成 2 個小三角形求 $\triangle OCD$ 面積。

直線 $L: 3x + 4y = 41$ 的 x 軸截距為 $\frac{41}{3}$ ，

$$\text{所以，}\triangle OCD \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \frac{41}{3} \times 5 + \frac{1}{2} \times \frac{41}{3} \times 1 = 41$$



解 6：利用正弦值求 $\triangle OCD$ 面積。由 $\cos \angle COD = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OD}}{\overline{OC} \times \overline{OD}} = \frac{100}{\sqrt{226} \times \sqrt{74}}$ ，

$$\text{得知 } \sin \angle COD = \frac{82}{\sqrt{226} \times \sqrt{74}}，$$

$$\text{故 } \triangle OCD \text{ 面積} = \frac{1}{2} \overline{OC} \times \overline{OD} \times \sin \angle COD = \frac{1}{2} \sqrt{226} \times \sqrt{74} \times \frac{82}{\sqrt{226} \times \sqrt{74}} = 41$$

第二題

第(1)題

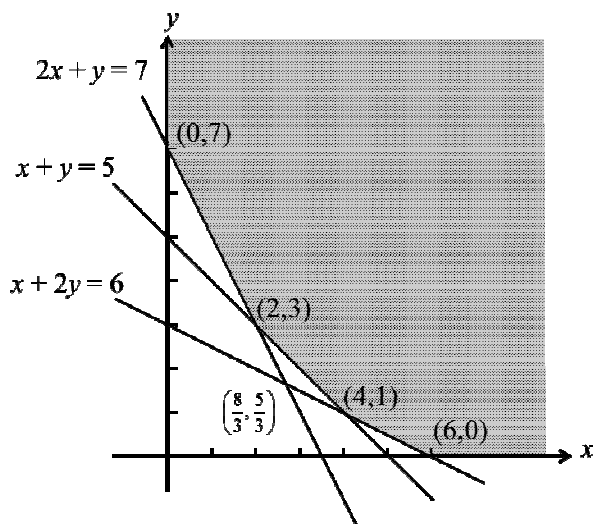
設工廠要買進 x 塊甲規格鐵板， y 塊乙規格鐵板。

1. 由甲規格的鐵板每塊的成本為 400 元，乙規格的鐵板每塊的成本為 320 元，得目標函數為 $p(x, y) = 400x + 320y$

2. 由題意知 x, y 需滿足下列聯立不等式：
$$\begin{cases} 8x + 4y \geq 28 \\ 4x + 4y \geq 20 \\ 8x + 16y \geq 48 \end{cases} \quad \left(\text{或} \begin{cases} 2x + y \geq 7 \\ x + y \geq 5 \\ x + 2y \geq 6 \end{cases} \right)$$

第(2)題

由聯立不等式可繪出此可行解區域如下圖的灰色區域（含邊界）。其四個頂點坐標為 $(6, 0), (4, 1), (2, 3), (0, 7)$



第(3)題

解 1：頂點法

1. 將四個正確頂點代入目標函數

頂 點	$(6, 0)$	$(4, 1)$	$(2, 3)$	$(0, 7)$
$p(x, y) = 400x + 320y$	2400	1920	1760	2240

2. 比較大小可知：當 $x = 2, y = 3$ 時，工廠所需的最低成本為 $p(2, 3) = 1760$ 元。

解 2：平行線法

畫出正確的可行解區域下（必須標示邊界，且在可行解區域畫斜線或陰影），當直線 $400x + 320y = k$ 在可行解區域掃動時，因目標函數所決定直線之斜率 $m = -\frac{5}{4}$ 介於 -1 與 -2 之間，故得知在當 $x = 2, y = 3$ 時，工廠所需的最低成本為 $p(2, 3) = 1760$ 元。

註：1. 若以頂點法解題（解 1），必須將四個正確的頂點代入目標函數，求出正確的目標函數值後，比較大小才能得到結論，否則將被扣分。

2. 若以平行線法解題（解 2），必須標示出正確的可行解區域，並說明目標函數所決定直線之斜率 $-\frac{5}{4}$ 介於 -1 與 -2 之間，或在正確可行解區域圖上，畫出與直線 $400x + 320y = k$ 平行的一組平行線，才能得出最低成本（1760）發生在頂點 $(2, 3)$ 。