

等 別：高等考試

類 科：電子工程技師

科 目：工程數學（包括線性代數、微分方程、向量分析、複變函數與
機率）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、求解微分方程式 $X^3 y''' - 3x^2 y'' + 7xy' - 8y = 0$ 。(20 分)

二、有一曲面 S ，其坐標以參數法表示為

$$x = u + v$$

$$y = u - v^2$$

$$z = u^2 + 3v^4$$

試求在 $u = 0, v = 1$ 處，曲面 S 之切平面方程式為何？(20 分)

三、設 A 為一 3×3 的對稱正定矩陣 (symmetric positive definite matrix)，即其滿足 $Aq_i = \lambda_i q_i$ ，其中 λ_i 為矩陣的特徵值 (eigenvalues)，且其值為正，而 q_i 為正交的特徵向量 (orthonormal eigenvectors)。若令

$x = c_1 q_1 + c_2 q_2 + c_3 q_3$ ，試求

(一) $x^T x$ 與 $x^T A x$ 之值各為何，請以 c 's 與 λ 's 表示之。(10 分)

(二) 設 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ ，若將(一)求得之 $x^T A x$ 之值除以 $x^T x$ 之值，則 c 's 值應為多少時此一比值會是最大？(10 分)

四、設 z 為複數，求方程式 $z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1 = 0$

(一) 在 $|z| < 1$ 的範圍內有多少個根？(10 分)

(二) 在 $|z| = 2$ 的圓內有多少個根？(10 分)

五、經長期觀察後，Bob 發現他的臉書每分鐘得到一個“讚”的機率為 $1/720$ ，設 L 為 Bob 在某一個 24 小時的區間內所獲得的“讚”總數，試計算

(一) 期望值 $E[X]$ 與變異量 (variance) $\text{Var}[X]$ 之值各為何？(8 分)

(二) $L = 0$ 之或然率為何？(8 分)

(三) 若 Bob 希望下一個 24 小時的區間內可獲得至少 2 個“讚”的或然率為何？(4 分)