

代號：31050
31150
頁次：4-1

102年公務人員特種考試身心障礙人員考試試題

等 別：三等考試
類 科：電力工程、電子工程
科 目：工程數學
考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：可以使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、試利用拉氏轉換（Laplace transform）求解 $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$
（其中 $x_i' \equiv \frac{dx_i}{dt}$ ， $i=1,2$ ）。（15 分）

二、試求函數 $\varphi(x, y, z) = xy + yz + zx$ 於位置 $(1,2,3)$ 朝向點 $(0,1,2)$ 之方向導數。（10 分）

三、假設隨機變數 X 與 Y 的聯合機率密度函數（joint probability density function）如下：

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

- (一)試求 k 值。（5 分）
(二)試求隨機變數 X 的邊際分布函數（marginal distribution function）。（5 分）
(三)試計算出隨機變數 X 的期望值（mean value），亦即 $E(X)$ 。（5 分）

四、試求出滿足方程式 $\sin z = \cosh 4$ 之所有的根，此處 $z = x + iy$ 為複數（complex number）。（10 分）

乙、測驗題部分：（50 分）

代號：5310

- (一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 有一微分方程式 $y'' - 4y' + 4y = 0$ ， $y(0) = 3$ ， $y'(0) = 1$ ，下列何者為其解？

(A) $y = 3e^{-2x} - 5xe^{-2x}$

(B) $y = 3e^{2x} - 5xe^{2x}$

(C) $y = 3e^{-2x} - 5xe^{2x}$

(D) $y = 3e^{2x} - 5xe^{-2x}$

2 求解微分方程式 $y'' + y' + 0.5y = 0$ ，其解為？

(A) $y = c_1 e^{-0.5x} - 0.5ic_2$

(B) $y = c_1 e^{0.5x} + 0.5ic_2$

(C) $y = e^{-0.5x} (c_1 \cos 0.5x + c_2 \sin 0.5x)$

(D) $y = e^{0.5x} (c_1 \cos 0.5x - c_2 \sin 0.5x)$

3 設 $F(s) = L\{f(t)\}$ 為 $f(t)$ 之拉氏轉換，則下列何者為初值定理（Initial-Value Theorem）？

(A) $\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] = f(0)$

(B) $\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)] = f(0)$

(C) $\lim_{s \rightarrow \infty} [F(s)/s] = f(0)$

(D) $\lim_{s \rightarrow 0} [F(s)] = f(0)$

4 下列何者為 $y' = 1 + y^2$ ， $y(0) = 0$ 之解？

(A) $y(x) = \tan x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$

(B) $y(x) = \sec x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$

(C) $y(x) = \cot x \quad (0 < |x| < \pi)$

(D) $y(x) = \csc x \quad (0 < |x| < \pi)$

5 已知微分方程式 $x^2 y' + y = 6x^3 + 5x^2 + 2x + 1$ 的解可表為 $y(x) = \sum_{m=0}^3 a_m x^m$ ，試求常數 a_0 、 a_1 及 a_2 之值，並

判定下列何者正確？

(A) $a_0 + a_1 + a_2 = 6$

(B) $a_0 + a_1 + a_2 = 4$

(C) $a_0 + a_1 + a_2 = 2$

(D) $a_0 + a_1 + a_2 = 0$

6 已知微分方程式 $y'' + \alpha y' + \beta y = Ke^{-3x}$ 的特解為 $y_p(x) = 2x^2 e^{-3x}$ ，試求常數 α 、 β 及 K 之值，並判定下列何者正確？

(A) $\alpha + \beta + K = 7$

(B) $\alpha + \beta + K = 13$

(C) $\alpha + \beta + K = 19$

(D) $\alpha + \beta + K = 25$

7 函數 $f(t)$ 之拉氏轉換（Laplace transform）為 $L\{f(t)\}$ ，令 $F(s) = L\{t \sin(2t)\}$ ，則 $F(4)$ 等於何值？

(A) $1/100$

(B) $1/50$

(C) $1/25$

(D) $1/10$

8 假設兩向量 $\mathbf{R}_1 = p\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{R}_2 = \mathbf{i} + 8\mathbf{j} + q\mathbf{k}$, 下列何者之 p, q 值會使 $\mathbf{R}_1$ 平行 $\mathbf{R}_2$?

(A) $p = -4$, $q = 4$

(B) $p = 4$, $q = -4$

(C) $p = -\frac{1}{4}$, $q = -4$

(D) $p = -4$, $q = \frac{1}{4}$

9 試求向量場 $\mathbf{v} = 2xy\mathbf{i} + xe^y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ 的散度 (divergence) :

(A) $2y\mathbf{i} + xe^y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

(B) $2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

(C) $2y + xe^y + 2$

(D) $2y + x + 2$

10 求複變函數積分 $\oint_C \frac{z^5}{(z+2i)^5} dz$ 之值, 其中積分路徑 C 為複數平面上包圍點 $-2i$ 的任意逆時鐘方向封閉曲線, 其中 $i = \sqrt{-1}$ 。

(A) 0

(B) 10π

(C) 20π

(D) 50π

11 複變函數 $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^4}$ 在 $z=0$ 的留數 (residue) 為何?

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{6}$

(D) $\frac{1}{8}$

12 請計算 $e^{2+7\pi i}$ 之值, 其中 $i = \sqrt{-1}$ 。

(A) e^2

(B) $-e^2$

(C) ie^2

(D) $-ie^2$

13 設 $\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, 其中 $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, 求 $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$?

(A) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t}$

(B) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t}$

(C) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-4t}$

(D) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t}$

14 設 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$ 為任二 $n \times n$ 矩陣, 且已知 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ (其中 $\mathbf{0}$ 為零矩陣), 則下列敘述何者恆真?

(A) $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$

(B) $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$

(C) $\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T = \mathbf{0}$

(D) $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{0}$

15 設 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 及 $\mathbf{C}$ 為任三 $n \times n$ 矩陣，則下列敘述何者不恆真？

(A) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

(B) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$

(C) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$

(D) 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ ，則 $\mathbf{B} = \mathbf{C}$

16 令 $\mathbf{I}$ 表示單位矩陣，右上標 T 表示轉置 (transpose)，下列之 $L: \mathbf{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$ 不是線性轉換 (linear transformation) ？

(A) $L(\mathbf{A}) = 3\mathbf{A}$

(B) $L(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$

(C) $L(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{I}$

(D) $L(\mathbf{A}) = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$

17 函數 $f(z) = \frac{-2z+3}{z^2-3z+2}$ 在 $1 < |z| < 2$ 的前提下可展開為 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ ，則 a_1 值為：

(A) 0

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 1

18 若一粒子受 $F = (y - x^2 e^x)\mathbf{i} + (\cos(2y^2) - x)\mathbf{j}$ 之力，沿以 (1,1), (0,1), (1,3), (0,3) 為頂點之長方形路徑 C 順時針方向運動一圈，求 F 所作的功：

(A) 2

(B) 4

(C) 6

(D) 8

19 兩連續隨機變數 X 、 Y 之結合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 則下列何者錯誤?}$$

(A) $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$

(B) $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) + f_Y(y)$

(C) $f_{X/Y}(x,y) = f_X(x)$

(D) $f_{Y/X}(y,x) = f_Y(y)$

20 若一打雞蛋中有 3 個尚未煮熟，自該打雞蛋中隨機挑出 2 個，試求所挑出之 2 個雞蛋皆已煮熟之機率。

(A) $\frac{5}{10}$

(B) $\frac{6}{11}$

(C) $\frac{7}{12}$

(D) $\frac{8}{13}$