

代號：26620
26720
29620
頁次：4-1

104年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電力工程、電子工程、醫學工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、請用級數方法求解 $y' = 2xy$ ，且以級數法表示其解，至少求至 x^6 項。（使用其他非級數法解不計分）（15 分）

二、設 λ_1 , λ_2 及 λ_3 為一 3×3 的實數矩陣 $\mathbf{M}$ 的整數特徵值（eigenvalues），且其中 $\lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1$ 。 $\mathbf{M}$ 的行列式值（determinant）為 36，且其跡（trace）為 10。令 $\mathbf{I}$ 為 3×3 單位矩陣（identity matrix），請找出 $(\mathbf{M} - \mathbf{I})^2$ 的全部特徵值。（15 分）

三、設 X 與 Y 是兩互相獨立的隨機變數（independent random variable），且其機率密度函數（probability density function）分別表示如下：

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} ; \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1/3, & 2 \leq y \leq 5 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

設 $W = X + Y$ 。

求(一) W 的機率密度函數（probability density function） $f_W(w)$ 。（5 分）

(二)畫出 $f_W(w)$ 之函數圖形。（5 分）

四、令區域 D 定義為 $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq x \leq 2$ ，求 $\iint_D (x^2 + y^2)^{4/3} dA$ 。（10 分）

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：2266

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 向量場 $\mathbf{F}=2xy\mathbf{i}+xe^y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$ 在點 $P = (-1, 0, 1)$ 的旋度 (curl) 為何？

- (A) $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ (B) $-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ (C) $-\mathbf{e}\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ (D) $3\mathbf{k}$

2 試用 divergence theorem，求面積分 $I = \oiint_S (x^3 dydz + x^2 y dx dz + x^2 z dx dy)$ ，其中 S 為一封閉面，包括一圓柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ ($0 \leq z \leq b$) 及在 $z = 0$ 及 $z = b$ 之二圓面積 ($x^2 + y^2 \leq a^2$)。

- (A) $\frac{3\pi}{2} a^4 b$ (B) $\frac{5\pi}{2} a^4 b$ (C) $\frac{3\pi}{4} a^4 b$ (D) $\frac{5\pi}{4} a^4 b$

3 定義函數為 $\varphi(x, y, z) = xy-yz+xyz$ ，請計算點 $P = (0, -1, 1)$ 在 $\mathbf{u} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 方向的改變率 (rate of change)？

- (A) 2 (B) -2 (C) $\sqrt{5}$ (D) $-\sqrt{5}$

4 若向量 $\mathbf{F}=\mathbf{i}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{G}=2\mathbf{j}$, $A=\|\mathbf{F}+\mathbf{G}\|$ 為 $\mathbf{F}+\mathbf{G}$ 的 2-norm，則 A 值為：

- (A) $\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ (B) $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ (C) 14 (D) $\sqrt{14}$

5 一矩陣 $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ，下列何者錯誤？

(A) M 可對角化

(B) 存在矩陣 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，使得 $P^{-1}MP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(C) M 之特徵值 (eigenvalue) 為 2, -2, 3

(D) 存在可逆矩陣 Q ，使得 $Q^{-1}MQ = D$ ，則 M 與 D 為相似矩陣 (similar matrices)

6 已知 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 20$ ，則 $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ -2d & -2e & -2f \\ -2g & -2h & -2i \end{vmatrix}$ 之值為何？

- (A) 0 (B) 20 (C) 40 (D) 80

7 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$ ，下列何者不是 A 的特徵值 (eigenvalue)？

- (A) 2 (B) 4 (C) $2+\sqrt{3}$ (D) $2-\sqrt{3}$

8 一矩陣 $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，下列何者錯誤？

(A) $M^3 = \begin{bmatrix} -5 & 16 & 9 \\ -2 & -5 & -23 \\ -23 & 9 & 11 \end{bmatrix}$

(B) $M^3 - 7M^2 + 19M = \begin{bmatrix} 19 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 19 \end{bmatrix}$

(C) M 之特徵多項式 (characteristic polynomial) 為 $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 19\lambda - 19$

(D) $M^4 = 30M^2 - 114M + 139I$

9 試計算複數多項式 (complex polynomial) $p(z) = z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z$ 在 $|z|=1$ 的圓內有多少個零點 (zeros)？
(包括重複數(multiplicities))

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

10 設 C 為 $|z|=2$ 之逆時針方向之封閉曲線，則 $\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$ 之值為何？

(A) 0

(B) $i2\pi$

(C) $i6\pi$

(D) $i10\pi$

11 化簡 $\overline{(6-2i)(1+i)}$ 可得：

(A) $4i+8$

(B) $4i-8$

(C) $-4i+8$

(D) $-4i-8$

12 下列何者為此階梯函數 $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < 3 \\ -1, & 3 \leq t \end{cases}$ 之拉普拉斯轉換？

(A) $\frac{1}{s}e^{-s} - \frac{2}{s}e^{-3s}$

(B) $\frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{2}{s^2}e^{-3s}$

(C) $\frac{1}{s}e^s + \frac{2}{s}e^{-3s}$

(D) $\frac{1}{s}e^{-s} + \frac{2}{s}e^{-3s}$

13 下列那一個常係數齊次偏微分方程式為橢圓型 (elliptic)？

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 100 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

(B) $\frac{\partial u}{\partial y} - 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

14 $xy' + 2y = x^3 y^2, y = ?$

(A) $\frac{1}{C-x}$

(B) $\frac{1}{Cx^2 - x^3}$

(C) $\frac{1}{Cx - x^2}$

(D) $\frac{1}{Cx^3 - x^4}$

- 15 令 $f(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{\pi} + \frac{e^{\pi t} - 1}{\pi^2}$, $t > 0$, 若 $F(s) = L\{f(t)\}$ 為 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換 (Laplace transform) , 試求 $F(2\pi)$?

(A) $\frac{3}{8\pi^3}$ (B) $\frac{3}{8\pi^2}$ (C) $\frac{1}{2\pi^3}$ (D) $\frac{1}{2\pi^2}$

- 16 已知週期為 2π 之週期函數 $f(t) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\pi < t < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & 0 < t < \pi \end{cases}$, 此週期函數之傅立葉分析級數為

$2\left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots\right)$ 。由此結果可以推得圓周率 π 的表示法為：

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1}$
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n - \frac{1}{2}}\right)$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{n - \frac{1}{2}}\right)$

- 17 下列何者不為拉普拉斯方程式 (Laplace Equation) $\nabla^2 u = 0$ 的解？

(A) $x + y + xy + 4z$ (B) $x^2 + y^2 + xy + yz + zx$
(C) $x^3 - 3xy^2 + zx$ (D) $\ln(x^2 + y^2)$, 其中 $x^2 + y^2 \neq 0$

- 18 假設隨機變數 X 的累積分布為 $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{當 } x < 1 \\ 1/4, & \text{當 } 1 \leq x < 3 \\ 1/2, & \text{當 } 3 \leq x < 5 \\ 3/4, & \text{當 } 5 \leq x < 7 \\ 1, & \text{當 } 7 \leq x \end{cases}$, 請問 $P(X \leq 5 | X \geq 2) = ?$

(A) 1/4 (B) 2/3 (C) 1/2 (D) 3/4

- 19 二枚錢幣投擲出現正面之機率分別為 $\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{10}$, 若隨機選擇出一枚錢幣並投擲二次, 試求第一次出現正面之機率為何？

(A) $\frac{1}{20}$ (B) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{10}$

- 20 假設兩個隨機變數 X 和 Y 的結合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & \text{當 } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 試問 $P(X < Y) = ?$

(A) 1 (B) 1/2 (C) 1/3 (D) 2/3